

MULTICOUCHE PLANE COLLEE ANISOTROPE:  
CARACTÉRISATION DES RESONANCES  
À L'AIDE DU FORMALISME DE LA MATRICE  $S$

C. POPA, J. L. IZBICKI

Laboratoire d'Acoustique Ultrasonore et d'Electronique,  
LAUE UMR 6068, Université du Havre,  
Place Robert Schuman, 76610 Le Havre, France

*Received May 3, 2005*

This paper deals with the influence of anisotropy of the bonding between two isotropic plates. The resonances of the multilayered plane structure are characterized by means of the  $S$  matrix formalism. The influence of anisotropy is strong on the frequencies of the vertical modes and is weaker for the other modes.

*Key words:* Resonances, Effects of anisotropy,  $S$  matrix, Vertical modes.

**INTRODUCTION**

L'interaction entre les ondes ultrasonores et des structures stratifiées représente un vaste sujet d'intérêt. Il y a cinquante ans, Thomson [1] et Hashell [2] ont développé un formalisme matriciel de diffusion multicouches. Lloyd and Redwood [3] ont été les premiers à étudier des ondes guidées dans une structure bicouche isotrope. Jungman *et al.* [4] ont étudié expérimentalement les propriétés des ondes de Lamb à une interface métal/ epoxy/ métal.

Des études sur la propagation des ondes élastiques dans des plaques anisotropes libres ont été conduites et publiées par Solie et Auld [5] en 1972. Les problèmes généraux d'une structure multicouche anisotrope sont présentés dans les travaux de Nayfeh puis plus tard dans une grande étude sur la propagation des ondes acoustiques dans un milieu anisotrope [6].

En 1995, J. C. Cheng [7] différencie les modes de vibration d'une plaque orthotrope en fonction des variations des constantes élastiques du matériau, à basse fréquence, tandis que F. Honarvar [8] le fait dans le cas d'un cylindre de symétrie transverse-isotrope.

Une méthode d'étude des caractéristiques de résonances est présentée dans cet article. Elle utilise le formalisme de la matrice  $S$  de diffusion acoustique.

## I. LES COEFFICIENTS DE RÉFLEXIONS ET TRANSMISSIONS DE LA STRUCTURE

La classification des modes symétriques et antisymétriques a été faite par Lamb dans le cas d'un matériau isotrope, en partant de la forme simplifiée des équations de dispersion, en couplant un potentiel scalaire dans le cas des ondes longitudinales avec un potentiel vecteur pour les ondes transversales. Cette méthode des potentiels est inapplicable en pratique pour un matériau d'une grande anisotropie. On utilise donc, une méthode dite de superposition des ondes partielles, une onde quasi-longitudinale  $qL$  et deux ondes quasi-transversales  $qSH$  et  $qSV$ . On présente brièvement la propagation des ondes dans des matériaux avec différents types d'anisotropie.

La structure considérée est formée de trois plaques de symétrie transverse – isotrope. Les directions cristallographiques du matériau coïncident avec le repère de coordonnées cartésien choisi, l'origine de ce repère est située à l'interface  $S_2/S_3$ . Les paramètres physiques du matériau noté  $p$  sont la masse volumique  $\rho_p$  et les constantes élastiques  $C_{ijkl}^p$ . L'ensemble est immergé dans un fluide de masse volumique  $\rho_0$  et la vitesse des ondes longitudinales est  $c_0$ . La propagation d'une onde plane incidente dans le fluide supérieur se fait suivant un vecteur d'onde  $\vec{k}_0$  tel que :

$$k_0 = \omega / c_0 \quad (1.1)$$

On appellera  $\theta_0$  l'angle d'incidence et  $\omega$  la fréquence angulaire.

Pour la couche solide anisotrope  $p$  et dans l'hypothèse des petites déformations, la relation entre le tenseur des contraintes  $\sigma_{ij}^p$  et le tenseur des déformations  $\varepsilon_{kl}^p$  est une équation linéaire, où le tenseur d'ordre quatre  $C_{ijkl}^p$  représente la constante de rigidité élastique.

$$\sigma_{ij}^p = C_{ijkl}^p \varepsilon_{kl}^p \quad (1.2)$$

Grâce à l'invariance d'un certain nombre de constantes élastiques lors de la permutation des indices, Voigt a introduit une notation simplifiée qui permet d'écrire :

$$\sigma_m^p = C_{mn}^p \varepsilon_n^p \quad (1.3)$$

Dans le cas des plaques isotropes, la matrice des constantes élastiques se réduit à neuf éléments dont seulement deux sont différents : ils sont notés  $\lambda$  et  $\mu$  (coefficients de Lamé du matériau isotrope). Avec la notation de Voigt, la matrice des constantes élastiques isotropes est :

$$\begin{pmatrix} C_{11} & C_{13} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{11} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{C_{11}-C_{13}}{2} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{C_{11}-C_{13}}{2} & 0 \\ & & & & & \frac{C_{11}-C_{13}}{2} \end{pmatrix} \quad (1.4)$$

avec  $C_{11} = \lambda + 2\mu$  et  $C_{13} = \lambda$ .

Les vitesses de propagation des ondes transversales notés  $v_S$  et longitudinales notés  $v_P$  dépendent chacune des caractéristiques du matériau :

$$\begin{aligned} v_S &= \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} = \sqrt{\frac{C_{11}-C_{13}}{2\rho}} \\ v_P &= \sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}} = \sqrt{\frac{C_{11}}{\rho}} \end{aligned} \quad (1.5)$$

Pour un matériau de symétrie transverse – isotrope, la matrice de symétrie comporte cinq coefficients élastiques indépendants.

$$\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{11} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & C_{55} & 0 & 0 \\ & & & & C_{55} & 0 \\ & & & & & C_{66} \end{pmatrix} \quad (1.6)$$

avec  $C_{66} = (C_{11} - C_{13})/2$ .

Le mode quasi-longitudinal se propage dans la direction  $x_2$  avec une vitesse  $v_{qP}$  et les deux ondes quasi-transversales polarisées dans les directions  $x_1$  et  $x_3$  se propagent aux vitesses  $v_{qSV}$  et  $v_{qSH}$ .

$$v_{qP} = \sqrt{\frac{C_{33}}{\rho}} \quad v_{qSV} = \sqrt{\frac{C_{66}}{\rho}} \quad v_{qSH} = \sqrt{\frac{C_{55}}{\rho}} \quad (1.7)$$

L'équation de propagation des ondes élastiques dans une structure anisotrope est donnée par un système de trois équations différentielles couplées :

$$\rho_p \frac{\partial^2 u_i^{(p)}}{\partial t^2} = C_{mn}^p \frac{\partial^2 u_i^{(p)}}{\partial x_j \partial x_k} \quad (1.8)$$

où  $u_i$  est le vecteur déplacement dans les directions  $i = 1, 2, 3$ . Dans l'analyse suivante on suppose que le champ de déplacement est indépendant de la direction  $x_2$ . Les solutions des équations de déplacement sont des ondes planes harmoniques progressives qui se propagent avec une polarisation  $U_{1,3q}$ , dont la vitesse de phase est  $c = \omega/k$ ;  $k$  désigne la composante du vecteur d'onde le long de l'axe  $x_1$ .

$$u_{iq}^{(p)} = \sum_{q=1}^6 A_q^{(p)} U_{iq}^{(p)} e^{ik(x_1 + \alpha^{(p)}x_3 - ct)} \quad (1.9)$$

le paramètre  $\alpha^{(p)}$ , composante du vecteur d'onde suivant la direction  $x_3$  est inconnu;  $U_{iq}^{(p)}$  sont les amplitudes du déplacement et  $A_q^{(p)}$  est le coefficient de combinaison linéaire. En substituant cette solution (1.9) dans l'équation du mouvement (1.8), on aboutit à l'équation de Christoffel (1.10) qui a pour valeurs propres les vitesses de phase et comme vecteurs propres les polarisations. Ce système peut s'écrire sous forme matricielle :

$$\left[ \Gamma_{il}^{(p)}(\alpha^{(p)}) \right] \left( U_{iq}^{(p)} \right) = 0 \quad (1.10)$$

où  $\Gamma_{il}^{(p)}$  est la matrice symétrique des constantes élastiques indépendantes.

Le système homogène (1.10) admet des solutions non triviales si et seulement si son déterminant s'annule. L'équation obtenue est une équation caractéristique du sixième degré qui permettra d'obtenir  $\alpha^{(p)}$ .

Lorsque l'onde est incidente sur le solide  $S_1$ , le coefficient de réflexion est noté  $R_1$  et le coefficient de transmission est noté  $T_1$ . Si l'onde est incidente sur le solide  $S_3$  les coefficients sont notés  $R_2$  et  $T_2$ . Le théorème de réciprocité assure que  $T_1 = T_2$  (en amplitude et en phase). On notera le coefficient de transmission  $T$ . Les conditions de continuité à l'interface solide–solide sont données par l'égalité des contraintes et des déplacements normales et tangentielles. Pour l'interface fluide–solide cela se réduit à la continuité des contraintes et des déplacements normaux. On obtient alors un système de douze équations pour les amplitudes  $U_{1,3q}^{(p)}$ . Les coefficients de réflexion  $R_{1,2}$  et de transmission  $T$  sont obtenus en appliquant le règle de Cramer pour le déterminant du système. Si le fluide supérieur est identique à un fluide inférieur, ce qui correspond à de nombreux cas pratiques :

$$R_1 = R_2 = R \quad (1.11)$$

## II. RÉSULTATS ET DISCUSSIONS

### 1) GÉNÉRALITÉS

Si on trace le module du coefficient de réflexion ou de transmission en fonction de la fréquence, on n'obtient pas suffisamment d'informations sur les caractéristiques des résonances de la structure. L'interférence et la superposition des modes rendent difficile la différenciation des fréquences de résonances. Pour les caractériser, il est intéressant de séparer les modes symétriques et antisymétriques en utilisant le formalisme de la matrice  $S$  [10]. Cette matrice  $S$ , qui caractérise la diffusion acoustique par la structure, ne dépend que des coefficients de réflexion et de transmission et s'écrit :

$$S = \begin{bmatrix} R & T \\ T & R \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

où les fluides supérieur et inférieur sont identiques.

Cette matrice est unitaire  $SS^+ = S^+S = I$  (le signe + représente le conjugué Hermitien et  $I$  est la matrice identité) en l'absence de phénomènes dissipatifs. Ceci se traduit par la conservation de l'énergie :

$$|R|^2 + |T|^2 = 1 \quad (2.2)$$

Les valeurs propres  $\alpha$  et  $\beta$  de la matrice  $S$  ont un module égal à un. Elles ont pour valeur :

$$\alpha = R - T \quad \text{et} \quad \beta = R + T \quad (2.3)$$

Les valeurs propres expriment des propriétés importantes de la diffusion acoustique car elles permettent de séparer les résonances en modes antisymétriques (valeur  $\alpha$ ) et symétriques (valeur  $\beta$ ). La caractérisation de la symétrie a été réalisée dans le cas d'une plaque isotrope. Cette séparation entre les deux types de modes est mise en évidence en considérant les amplitudes de transition  $T_\alpha$  et  $T_\beta$  définies par:

$$\begin{aligned} T_\alpha &= (\alpha - 1)/2i && \text{modes antisymétriques} \\ T_\beta &= (\beta - 1)/2i && \text{modes symétriques} \end{aligned} \quad (2.4)$$

### 2) ETUDE D'UNE MULTICOUCHE ISOTROPE

On considère une structure formée par deux plaques solides de symétrie isotrope liées par une fine couche d'adhésif,  $S_2$ . Les propriétés acoustiques des

matériaux sont données dans la Table II.1. Suivant les cas on considérera que  $S_2$  est un matériau isotrope ou anisotrope (cubique ou transverse-isotrope).

La Fig. II.1 correspond à un angle d'incidence de  $\theta_0 = 1^\circ$ , pour un matériau  $S_2$  isotrope. Les amplitudes de transition  $|T_\alpha|^2$  modes antisymétriques (Fig. II.1.b) et  $|T_\beta|^2$  modes symétriques (Fig. II.1.c) montrent que les pics de résonance sont bien isolés alors que dans le cas du coefficient de transmission  $|T|^2$  (Fig. II.1.a) les pics ne le sont pas toujours (cf le massif vers 0,6 MHz). Les courbes donnent

Table II.1

Les paramètres physiques

|            | Matériel | Symétry             | $C_{11}$<br>Pa $\times 10^9$ | $C_{13}$<br>Pa $\times 10^9$ | $C_{33}$<br>Pa $\times 10^9$ | $C_{55}$<br>Pa $\times 10^9$ |
|------------|----------|---------------------|------------------------------|------------------------------|------------------------------|------------------------------|
| $S_1, S_3$ | Aluminum | Isotrope            | $1.139 \times 10^2$          | $6.015 \times 10$            | $1.139 \times 10^2$          | $2.69 \times 10$             |
| $S_2$      | Epoxy    | Isotrope            | 4.1                          | 1.372                        | 4.108                        | 1.368                        |
|            |          | Cubique             | 4.1                          | 1.372                        | 4.108                        | 2.052                        |
|            |          | Transverse Isotrope | 4.1                          | 1.372                        | 6.162                        | 2.052                        |

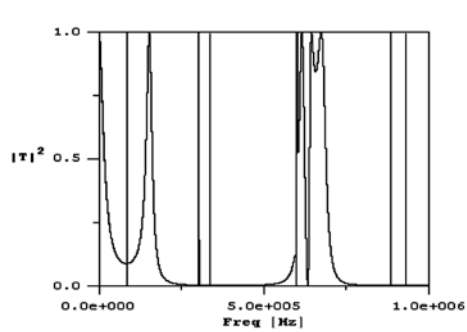


Fig. II.1.a

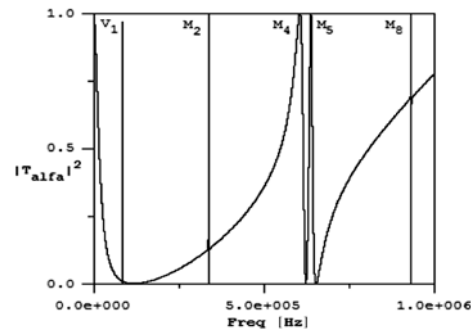


Fig. II.1.b

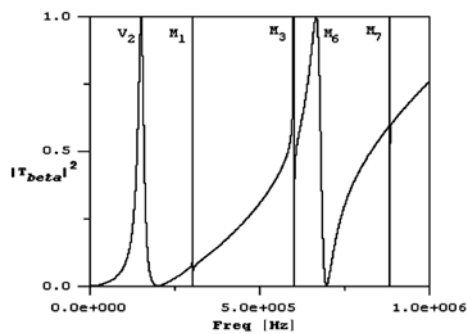


Fig. II.1.c

Fig II.1. – Structure Aluminium/Epoxy/Aluminium. (a) Module au carré du coefficient de transmission en fonction de la fréquence pour un angle d'incidence de  $\theta_0 = 1^\circ$ , (b) Module au carré du coefficient de transition  $|T_\alpha|^2$  modes antisymétriques et (c) module au carré du coefficient de transition  $|T_\beta|^2$  modes symétriques.

la position fréquentielle des résonances; la largeur à mi hauteur des modules des amplitudes de transition donne la largeur des résonances. Le module de l'amplitude de transition est toujours égal à 1 à la fréquence de résonance. Les modes de résonances ont été nommés modes **V** pour les modes verticaux et modes **M** pour les autres (quasi-longitudinaux et quasi-transversaux).

Les fréquences de résonance obtenues ici correspondent bien à des recherches de pics dans le plan complexe.

Les valeurs des fréquences de résonance pour les modes de vibration dans le cas de cette structure (deux plaques isotropes et adhésif isotrope) [11] sont identiques à celles obtenues dans le cas du formalisme de la matrice **S**.

### 3) ÉTUDE D'UNE MULTICOUCHE ANISOTROPE

On considère une structure dans laquelle le solide  $S_2$  est anisotrope. La question qui se pose est: est-il possible de suivre l'évolution des résonances si on fait varier l'anisotropie de la couche médiane?

Dans un premier temps on passe de la symétrie isotrope à la symétrie cubique en faisant varier  $C_{55}$  de la façon suivante:

$$C_{55} = C_{55}^0(1 + \zeta) \quad (2.5)$$

où  $C_{55}^0$  est la valeur du coefficient dans le cas isotrope et où le paramètre  $\zeta$  varie entre 0 et 50%.

Dans un deuxième temps on passe de la symétrie isotrope à la symétrie transverse isotrope en faisant varier  $C_{55}$  et  $C_{33}$ . Les deux coefficients seront modifiés en même temps, du même pourcentage, comme indiqué dans l'équation (2.5).

Table II.2

L'étude des fréquences de résonances par rapport de l'anisotropie

| Symmetry               |     | <b>V<sub>1</sub></b> | <b>V<sub>2</sub></b> | <b>M<sub>1</sub></b> | <b>M<sub>2</sub></b> | <b>M<sub>3</sub></b> | <b>M<sub>4</sub></b> | <b>M<sub>5</sub></b> | <b>M<sub>6</sub></b> |
|------------------------|-----|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|
| Isotrope               |     | 0,853                | 1,53                 | 3,04                 | 3,37                 | 6,01                 | 6,16                 | 6,45                 | 6,752                |
| Cubique                | 10% | 0,885                | 1,53                 | 3,04                 | 3,39                 | 6,01                 | 6,17                 | 6,46                 | 6,752                |
|                        | 20% | 0,913                | 1,53                 | 3,04                 | 3,41                 | 6,02                 | 6,175                | 6,47                 | 6,752                |
|                        | 30% | 0,947                | 1,53                 | 3,04                 | 3,44                 | 6,02                 | 6,18                 | 6,48                 | 6,752                |
|                        | 40% | 0,961                | 1,53                 | 3,04                 | 3,46                 | 6,02                 | 6,19                 | 6,48                 | 6,752                |
|                        | 50% | 0,982                | 1,53                 | 3,04                 | 3,48                 | 6,02                 | 6,19                 | 6,49                 | 6,752                |
| Transverse<br>Isotrope | 10% | 0,885                | 1,588                | 3,04                 | 3,395                | 6,02                 | 6,171                | 6,46                 | 6,794                |
|                        | 20% | 0,913                | 1,643                | 3,04                 | 3,419                | 6,025                | 6,17                 | 6,47                 | 6,835                |
|                        | 30% | 0,947                | 1,694                | 3,04                 | 3,443                | 6,03                 | 6,183                | 6,48                 | 6,779                |
|                        | 40% | 0,961                | 1,741                | 3,04                 | 3,466                | 6,033                | 6,19                 | 6,49                 | 6,915                |
|                        | 50% | 0,982                | 1,786                | 3,04                 | 3,488                | 6,036                | 6,193                | 6,49                 | 6,953                |

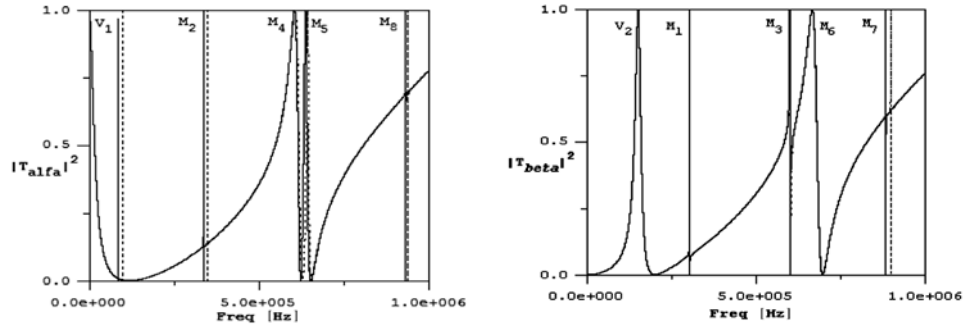


Fig. II.2. – Influence des constantes élastiques sur les modules au carré de amplitudes de transition  $|T_\alpha|^2$  modes antisymétriques et  $|T_\beta|^2$  modes symétriques en fonction de l'augmentation de l'anisotropie. Passage de la symétrie isotrope à la cubique par l'augmentation du coefficient élastique  $C_{55}$  de 50%.

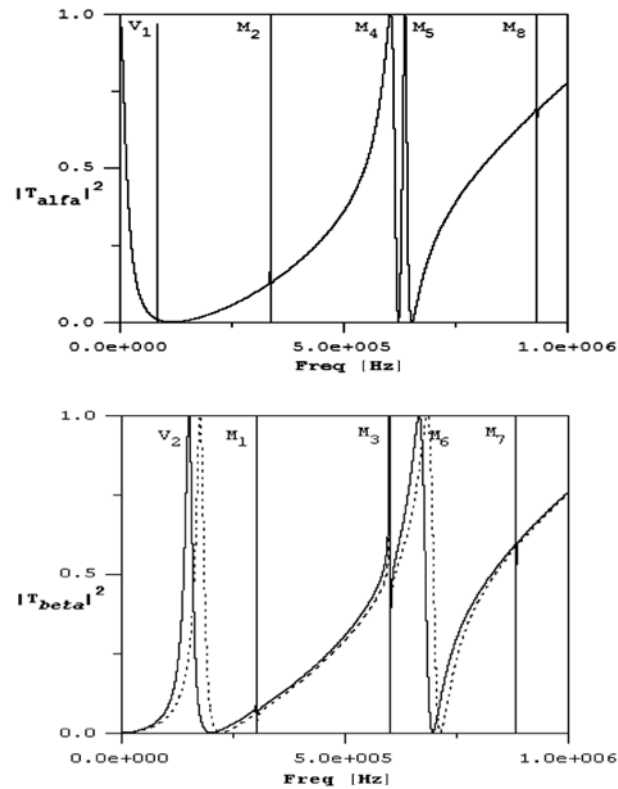


Fig. II.3. – Influence des constantes élastiques sur les modules au carré de amplitudes de transition  $|T_\alpha|^2$  modes antisymétriques et  $|T_\beta|^2$  modes symétriques en fonction de l'augmentation de l'anisotropie par l'augmentation du coefficient élastique  $C_{33}$  de 50%.



Dans le premier cas, le coefficient élastique  $C_{55}$  est modifié et on attend une perturbation importante des modes quasi-transversaux, parce que ce paramètre relie les contraintes et les déplacements dans le plan ( $x_1 - x_3$ ). Dans le second cas, le deuxième coefficient élastique  $C_{33}$  varie et les modes quasi-longitudinaux seront aussi affectés.

Les valeurs des fréquences de résonances déterminées à l'aide des amplitudes de transition sont résumées dans le Tableau II.2.

En augmentant progressivement l'anisotropie, les modes de vibration antisymétriques sont fortement influencés par la symétrie cubique alors que les modes symétriques sont sensibles à l'approche de l'anisotropie transverse isotrope.

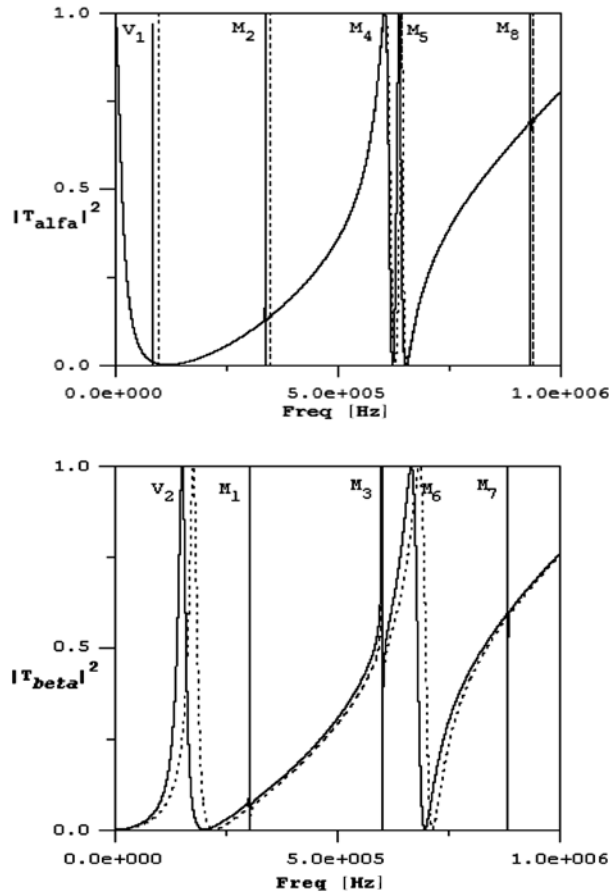


Fig. II.4. – Influence des constantes élastiques sur les modules au carré de amplitudes de transition  $|T_{\alpha}|^2$  modes antisymétriques et  $|T_{\beta}|^2$  modes symétriques en fonction de l'augmentation de l'anisotropie, passage à symétrie transverse-isotrope. Passage de la symétrie isotrope à la transverse – isotrope par l'augmentation des coefficients élastiques  $C_{33}$  et  $C_{55}$  de 50%.

En passant de la symétrie isotrope à la symétrie cubique, le mode vertical antisymétrique  $V_1$  présente un déplacement de sa fréquence de résonance d'un pourcentage de 15% environ, tandis que le mode  $M_2$  est moins sensible (3% environ). Le mode vertical symétrique, à basse fréquence, ne présente aucune modification. Si on fait varier uniquement  $C_{33}$  (toutes les autres constantes élastiques restant inchangées), on s'attend à un effet inverse: les modes symétriques sont sensibles à l'augmentation du coefficient. Les modes symétriques ont également leurs fréquences de résonances modifiées, alors que les modes antisymétriques sont inchangés, Fig. II.3. Les fréquences de résonances du mode vertical symétrique  $V_2$  sont modifiées d'un pourcentage de 12% environ, alors que le mode  $M_6$  est moins sensible (2% environ).

Une fois que la symétrie transverse-isotrope est atteinte, parmi tous les modes analysés, les seuls qui sont insensibles au changement d'anisotropie sont les modes symétriques  $M_1$  et  $M_7$ . Alors que les plus sensibles sont les modes verticaux  $V_1$  et  $V_2$ , (cf. Fig. II.4).

### CONCLUSION

La diffusion acoustique dans une structure tricouche anisotrope a été présentée. Pour déterminer les fréquences de résonances, on a utilisé le formalisme de la matrice  $S$ , qui permet la différenciation des modes symétriques et antisymétriques. L'évolution des amplitudes des fréquences de résonance est suivie en fonction du degré d'anisotropie de la couche centrale d'adhésif, initialement considérée de symétrie isotrope. En passant de la symétrie isotrope à la symétrie cubique, les modes antisymétriques sont fortement perturbés.

Au passage de la symétrie isotrope à la symétrie cubique du milieu central  $S_2$  par l'augmentation de la constante élastique  $C_{55}$ , les modes verticaux sont grandement modifiés, les modes quasi-longitudinaux et quasi-transversaux restants presque inchangés. Avec la variation du coefficient élastique  $C_{33}$ , qui caractérise le matériau suivant ses axes, les modes symétriques changent de fréquences de résonance.

Lorsqu'on passe de la symétrie isotrope à la symétrie transverse isotrope, les modes verticaux sont les plus sensibles. Comme la variation des fréquences des résonances est petite, sauf dans le cas des modes verticaux, on calculera, dans une étude future, l'influence de la variation des constantes élastiques sur les largeurs de résonance des modes.

### REFERENCES

1. W. T. Thomson, Transmission of elastic waves through a stratified solid medium, *J. Appl. Phys.*, 21, pp. 89-93, 1950.

2. N. A. Haskell, The dispersion of surface waves on multilayered media. *Bull. Seism. Soc. Am.*, 25(6), pp. 1104–1106, 1953.
3. P. P. Lloyd, M. Redwood, Wave propagation in a layered plate composed of two solids with perfect contact, slip, or a fluid layer at their interface, *Acustica*, 16, pp. 169–173, 1965.
4. A. Jungman, P. Guy, G. Quentin, Characterization of glued bonds using ultrasonic reflected beam, *Review of Progress in Quantitative Nondistrictive Evaluation*, 10B, pp. 1319–1327, 1991.
5. L. P. Solie and B. A. Auld, Elastic waves in free anisotropic plates, *J. Acoust. Soc. Am.* 54, 50–65, 1973.
6. A. H. Nayfeh, *Waves propagation in layered anisotropic media with Applications to Composites*, Ed. J. R. Achenbach, B. Budiansky, H. A. Lawerier, P.G. Saffman, U. Van Wungaarden and J. R. Willis, North-Holland Series in Applied Mathematic and Mechanics, 1995.
7. Jian-Chun Cheng and Yves H. Berthelot, Theory of laser-generated transient Lamb waves in orthotropic plates, *J. Phys. D. Appl. Phys.*, 29, 1857–1867, 1996.
8. F. Honarvar and A. N. Sinclair, Acoustic wave scattering from transversely isotropic cylinders, *J. Acoust. Soc. Am.*, 100, 57–63, 1996.
9. I. A. Viktorov, *Rayleigh and Lamb waves*, Plenum, New-York, 1967.
10. H. Franklin, E. Danila and J-M. Conoir, S-matrix theory applied to acoustic scattering by asymmetrically fluid-loaded elastic isotropic plates, *J. Acoust. Soc. Am.*, 110(1) 243–253, 2001.
11. V. Vlasie, *Modélisation mécanique et caractérisation ultrasonore de structures collées*, Thèse de doctorat de L'Université Paris 6, 2003.